1/12/15. και 3/12/15

Η γραμμική απεικόνιση $\bar{g}(\bar{x}) = A\bar{x}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, είναι διαφορίσιμη στον $\mathbb{R}^n$;

Λύση:

Είναι, $$\bar{g}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n \\ \vdots \\ \alpha_{m}x_1 + \ldots + \alpha_{mn}x_n \end{pmatrix} \quad \left[= \begin{pmatrix} g_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ g_n(\bar{x}) \end{pmatrix} \right]$$

Είναι, $$J_{\bar{g}}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \nabla g_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ \nabla g_n(\bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = A$$

Είναι, $$\lim_{\bar{\eta} \to \bar{0}} \frac{\bar{g}(\bar{x}+\bar{\eta}) - \bar{g}(\bar{x}) - J_{\bar{g}}(\bar{x})\,\bar{\eta}}{\|\bar{\eta}\|}$$, $\bar{x}$ τυχαίο $\in \mathbb{R}^n$

$$= \lim_{\bar{\eta} \to \bar{0}} \frac{A(\bar{x}+\bar{\eta}) - A\bar{x} - A\bar{\eta}}{\|\bar{\eta}\|}$$ επιμεριστικό (ως προς πρόσθεση) γινόμενο πινάκων

$$= \lim_{\bar{\eta} \to \bar{0}} \frac{A\bar{x} + A\bar{\eta} - A\bar{x} - A\bar{\eta}}{\|\bar{\eta}\|} = \bar{0}$$, άρα $\bar{g}$ διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^n$

** f_i συνεχώς διαφορίσιμη, για τυχαίο $i \in \mathbb{N}$
$\Longleftrightarrow \bar{f} = (f_1, \dots, f_i, \dots, f_n)$ συνεχώς διαφορίσιμη

Πρόταση (Βασική!)

Έστω $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $\bar{x} \in U$

Αν f μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{x}$ και $\nabla f(\bar{x})$ συνεχής στο $\bar{x}$, (δηλ. $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}$, συνεχείς στο $\bar{x}$, $i = 1, \dots, n$),

η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο $\bar{x}$ ($\Rightarrow$ διαφορίσιμη στο $\bar{x}$)

[Απόδειξη (Βλέπε e-book Γιαννούλη, για την αναλυτική απόδειξη)]

Παράδειγμα πάνω στην πρόταση:

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad (x,y) \in B((0,0), 1)$$

(θετικό (άνω) ημισφαίριο μοναδιαίας σφαίρας)

f συνεχής, αφού $(x,y) \mapsto x$, $(x,y) \mapsto y$, $(x,y) \mapsto \sqrt{x+y}$

είναι συνεχής, και f αποτελεί σύνθεσή τους.

Ακόμη,
$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) = \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right)$$

$$= -\frac{(x,y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = -\frac{\bar{f}_1(x,y)^{\sim (x,y)}}{f(x,y)}$$, συνεχής ως πηλίκο συνεχών.

Άρα, f συνεχώς διαφορίσιμη, $\forall (x,y) \in B((0,0), 1)$

Σημαντικές συνεπαγωγές I (Έχουμε αποδείξει).

Έστω $\bar{f}: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}$ ανοικτό και $\bar{x} \in U$.

Ισχύουν:

$\bar{f}$ συνεχώς διαφορίσιμη στο $\bar{x}$ $\Longrightarrow$ $\bar{f}$ διαφορίσιμη στο $\bar{x}$

$\Longrightarrow$ $\bar{f}$ μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{x}$ κ' $\bar{f}$ συνεχής στο $\bar{x}$

$\bar{f}$ μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{x}$ κ' $J_{\bar{f}}$ συνεχής στο $\bar{x}$

$\Longrightarrow$ $\bar{f}$ συνεχώς διαφορίσιμη στο $\bar{x}$.

$\bar{f}$ μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{x}$ κ' $J_{\bar{f}}$ φραγμένη στο $\bar{x}$

$\Longrightarrow$ $\bar{f}$ συνεχής στο $\bar{x}$